

---

# Praktikum 4

Simon Stingelin

24.02.2025

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Ausgleichsrechnung</b>	<b>1</b>
1.1	Lernziele	1
1.2	Theorie	1
1.3	Aufträge	1
1.4	Abgabe	4

---

## 1 Lineare Ausgleichsrechnung

### 1.1 Lernziele

- Sie erkennen, ob es sich bei einem gegebenem funktionalen Zusammenhang zu einer Reihe von Messungen um ein lineares Ausgleichsproblem handelt.
- Sie können die zum Ausgleichsproblem gehörende Normalgleichung formulieren.
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen Normalgleichung und Minimierung der Fehlerquadratsumme.
- Sie können die Kleinste-Quadrate-Lösung durch Cholesky-Zerlegung von  $A^T A$  und Vorwärts- sowie Rückwärts-substitution berechnen.

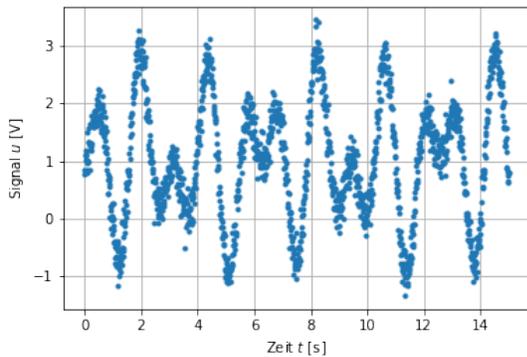
### 1.2 Theorie

Das Praktikum fokussiert die lineare Ausgleichsrechnung, insbesondere auf die Abschnitte 2.2.1 bis 2.2.3 ohne  $QR$ -Zerlegung und Householder-Transformation.

### 1.3 Aufträge

#### Auftrag 1

Wir betrachten das Beispiel 2.10 im Skript. Gegeben sei ein periodischer Vorgang zum Beispiel aus einer Messung  $(t_i, u_i)$ ,



für dessen Modellierung durch eine stetige Funktion  $f(t)$  mit **gegebener** Periode  $T$  eine Linearkombination der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \cos(\omega k t), \quad k = 0, \dots, n \\ \sin(\omega k t), \quad k = 1, \dots, n \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

verwendet wird. Gesucht sind daher die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  von

$$f_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)).$$

### Aufgaben:

1. Laden Sie die gegebenen Messdaten aus dem File ‚data.txt‘

```
data = np.genfromtxt('data.txt')
```

In matlab

```
data = readmatrix('data.txt')
```

2. Visualisieren Sie die Messung. Wie gross ist die Abtastrate? Wie gross schätzen Sie die Grundfrequenz  $1/T$  des periodischen Signals?
3. Welche Dimension hat die Systemmatrix für  $f_n(t)$ ?
4. Berechnen Sie die Systemmatrix für  $f_5(t)$  mit  $\omega = 1$ .
5. Welche Dimension hat die Normalgleichung?
6. Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung aus NumPy

```
from np.linalg import cholesky
```

```
L = cholesky(A)
```

In matlab

```
L = chol(A, "lower")
```

die Normalgleichung. Wie lautet  $f_n(t)$ ?

**Achtung:** Da  $L$  nicht normiert ist, erfordert das Vorwärtseinsetzen die Division durch das Diagonalelement. In der native SciPy Implementierung wird dies gemacht.

```
from scipy.linalg import solve_triangular
```

In matlab

```
opts.LT = true;  
x = linsolve(L,b,opts);
```

7. Visualisieren Sie Ihre Lösung in den Messdaten. Welche Anteile sind massgebend vorhanden? (**Optional:** Vergleichen Sie das Resultat mit der FFT.)
8. Wie gross ist die quadratische Fehlersumme?
9. (**Optional für Python interessierte Studierende nach der Bearbeitung des Auftrag 2!**) Vervollständigen Sie die python Klasse mit Funktionalität.
  - *Initialisierung* speichert die Messdaten
  - *computeCoefs(n)* berechnet und speichert die Koeffizienten für das Modell  $f_n(t)$ .
  - *compute(t)* berechnet für ein *np.array* die Modellfunktionen mit den berechneten Koeffizienten.

Sie können sich an der folgenden Vorlage orientieren:

```
class myFit:  
    def __init__(self, data):  
        self.setData(data)  
        self.c = None      # Klassen Variable für die Modell Koeffizienten  
        self.omega = omega  
  
    def setData(self, data):  
        self.ti = data[:,0] # Zeitstempel  
        self.ui = data[:,1] # Messwerte  
  
    def computeCoefs(self, n=5):  
        self.n = n  
  
        <<snipp>>  
  
        self.c = <<snipp>>  
  
    def compute(self, t):  
        if not type(mf.c) == np.ndarray:  
            self.computeCoefs()  
  
        y = <<snipp>>  
  
        return y
```

Damit können wir Messdaten effizient analysieren:

```
# Objekt instanzieren  
mf = myFit(data)  
# Koeffizienten berechnen  
mf.computeCoefs(5)  
# Visualisieren  
plt.plot(t,mf.compute(t))  
plt.show()
```

## Auftrag 2

Gegeben ist die Entladungskurve eines RC-Netzwerk Kondensators mit der Kapazität  $C$ . Der Innenwiderstand  $R_C$  beträgt  $R_C = 100\Omega$ .

Zeit [ms]	Spannung [V]
0.0	5.0
0.03	2.94
0.05	1.73
0.08	1.01
0.10	0.6

Bestimmen Sie mit Hilfe eines  $RC$ -Glieds und der linearen Ausgleichsrechnung die Kapazität  $C$  des Kondensators.

1. Wie lautet die Differentialgleichung? Berechnen Sie die allgemeine Lösung als Basis für das Modell.
2. Wie lautet die Systemmatrix?
3. Wie gross ist die Kapazität?

## 1.4 Abgabe

- Auftrag 1: Lösungsfunktion mit Koeffizienten, Graph mit Messung und Modell, quadratische Fehlersumme.
- Auftrag 2: Modell, Kapazität.

Kurzer Bericht mit den Ergebnisse und python Code als Textfile.

### Downloads:

- PDF-Dokumentation:
  - Anleitung Praktikum 4
  - data.txt